

2023 Hong Kong Mathematics Kangaroo Contest — Student —

2023香港數學袋鼠競賽 — 中學高年級
2023香港数学袋鼠竞赛 — 中学高年級



Instruction | 說明 | 说明

1. DO NOT FLIP OPEN THIS FRONT COVER UNTIL YOUR PROCTOR TELLS YOU.
在未收到監考老師指示前，請不要翻開此封面。
在未收到监考老师指示前，请不要翻开此封面。
2. This is a 25 question multiple choice test. For each question, only one answer choice is correct.
這是一套包括25道選擇題的測試，每道題目只有一個正確答案。
这是一套包括25道选择题的测试，每道题目只有一个正确答案。
3. Mark your answer to each problem on the answer sheet with a pencil. Check blackened answers for accuracy and erase errors completely. Only answers that are properly marked on the answer sheet will be scored.
請將每道題目的答案用鉛筆標註在答題卡上。請注意檢查塗寫的黑色長方塊的準確性，用橡皮完全擦掉錯誤的答案。只有恰當標註在答題卡上的答案才會被評分。
请将每道题目的答案用铅笔标注在答题卡上。请注意检查涂写的黑色长方块的准确性，用橡皮完全擦掉错误的答案。只有恰当标注在答题卡上的答案才会被评分。
4. Every question is given a point value. You will receive full points for correct answer, and zero point for blank or incorrect answer. The full score of this test is 100 points.
每道題目都有給定的分值。每題答對得滿分，答錯或空白得0分。本次測試的滿分為100分。
每道题目都有给定的分值。每题答对得满分，答错或空白得0分。本次测试的满分为100分。
5. Only scratch paper, graph paper, rulers, protractors, and erasers are allowed as aids. Calculators are NOT allowed. No problems on the test *require* the use of a calculator.
只能使用草稿紙、方格紙、尺、量角器和橡皮作為輔助工具。計算器是不允許使用的。測試中沒有任何問題必須需要使用計算器。
只能使用草稿纸、方格纸、尺、量角器和橡皮作为辅助工具。计算器是不允许使用的。测试中没有任何问题必须需要使用计算器。
6. Figures are not necessarily drawn to scale.
圖形不一定按比例繪製。
图形不一定按比例绘制。
7. Before beginning the test, make sure to write the Competition Code “Student”, your name and Competition ID with your signature on the answer sheet, especially to bubble in the 9-digit Competition ID completely!
在開始測試之前，請確保已將競賽代碼“Student”，姓名和准考證號填寫在答題卡上並簽名，特別是9位准考證號的每位數字已經塗好相應的黑色長方塊。
在开始测试之前，请确保已将竞赛代码“Student”，姓名和准考证号填写在答题卡上并签名，特别是9位准考证号的每位数字已经涂好相应的黑色长方块。
8. You will have 75 minutes to complete the test once your proctor tells you to begin.
監考老師宣布開始後，你將有75分鐘的時間完成測試。
监考老师宣布开始后，你将有75分钟的时间完成测试。

Part 1: 8 problems, 3 points each

第一部分：8 道題目，每題 3 分 | 第一部分：8 道題目，每題 3 分

1. Tim calculates the mean of five different prime numbers. His answer is an integer. What is the smallest possible integer he could have obtained?

Tim 計算五個不同素數的平均值。他的答案是一個整數。那麼他可能得到的最小整數是多少？

Tim 计算五个不同素数的平均值。他的答案是一个整数。那么他可能得到的最小整数是多少？

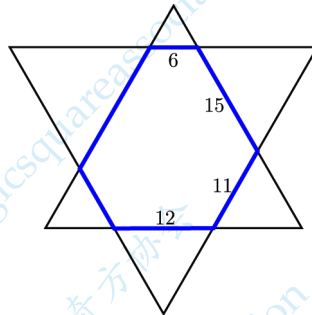
- (A) 2 (B) 5 (C) 6 (D) 12 (E) 30

「Proposed by Paraguay | 巴拉圭供題 | 巴拉圭供題」

2. Two equilateral triangles are put together to form a hexagon with their opposite sides parallel. We know the length of four sides of this hexagon, as shown in the diagram. What is the perimeter of the hexagon?

兩個等邊三角形放在一起形成一個對邊平行的六邊形。如圖所示，我們已經知道這個六邊形的四條邊的長度。問六邊形的周長是多少？

两个等边三角形放在一起形成一个对边平行的六边形。如图所示，我们已经知道这个六边形的四条边的长度。问六边形的周长是多少？



- (A) 64 (B) 66 (C) 68 (D) 70 (E) 76

「Proposed by Mexico | 墨西哥供題 | 墨西哥供題」

3. How many pairs of integers m and n satisfy the below inequality?

滿足下面不等式的整數對 m 和 n 有多少個?

滿足下面不等式的整數對 m 和 n 有多少個?

$$|2m - 2023| + |2n + m| \leq 1$$

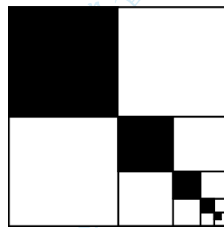
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希臘供題」

4. A square with area 84 is divided into four squares. The upper left square is coloured black. The lower right square is again divided into four squares, and so on. The process is repeated an infinite number of times. What is the total area that is coloured black?

一個面積為 84 的正方形被分成四個正方形。左上角的正方形是黑色的。右下方的正方形又被分成四個正方形，依此類推。這個過程無限次重複。問黑色部分的總面積是多少?

一个面积为 84 的正方形被分成四个正方形。左上角的正方形是黑色的。右下方的正方形又被分成四个正方形，依此类推。这个过程无限次重复。问黑色部分的总面积是多少?



- (A) 24 (B) 28 (C) 31 (D) 35 (E) 42

「Proposed by Netherlands | 荷蘭供題 | 荷蘭供題」

5. The graphs of the functions $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ all pass through the same point, no matter what value of a is chosen. What is the sum of the coordinates of that point?

無論 a 取什麼值，函數 $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ 的圖像都通過同一個點。問該點的坐標之和是多少?

无论 a 取什么值，函数 $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ 的图像都通过同一个点。问该点的坐标之和是多少?

- (A) 2 (B) 4 (C) 7
(D) 8 (E) none of the previous | 以上都不對 | 以上都不對

「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希臘供題」

6. Each of the integers from 1 to 9 is to be placed in one of the 9 boxes in the picture so that any three numbers in consecutive boxes add to a multiple of 3. The numbers 7 and 9 have already been placed. In how many different ways can the remaining boxes be filled?

從 1 到 9 的每個整數都被填入下圖 9 個方格中的一個，使得任意連續方格中的三個數相加都是 3 的倍數。數 7 和 9 已經填好。問剩下的方格有多少種不同的填法？

从 1 到 9 的每个整数都被填入下图 9 个方格中的一个，使得任意连续方格中的三个数相加都是 3 的倍数。数 7 和 9 已经填好。问剩下的方格有多少种不同的填法？



- (A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 24

「Proposed by Mexico | 墨西哥供題 | 墨西哥供題」

7. We are given five numbers a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 whose sum is S . For each $k, 1 \leq k \leq 5$, we know that $a_k = k + S$. What is the value of S ?

給定五個數 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ，其總和為 S 。對於每個滿足 $1 \leq k \leq 5$ 的 k ，我們知道 $a_k = k + S$ 。問 S 的值是多少？

给定五个数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ，其总和为 S 。对于每个满足 $1 \leq k \leq 5$ 的 k ，我们知道 $a_k = k + S$ 。问 S 的值是多少？

- (A) -15 (B) $-\frac{15}{4}$ (C) $\frac{15}{4}$
 (D) 15 (E) none of the previous | 以上都不對 | 以上都不对

「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希臘供題」

8. There are 23 animals sitting in a row at the cinema. Each animal is either a beaver or a kangaroo. Everyone has at least one neighbour who is a kangaroo. What is the largest possible number of beavers in the row?

電影院裡有 23 隻動物坐在一行。每隻動物要么是海狸，要么是袋鼠。每隻動物的鄰座都有至少一隻袋鼠。問這一行中最多可能有多少隻海狸？

电影院里有 23 只动物坐在一行。每只动物要么是海狸，要么是袋鼠。每只动物的邻座都有至少一只袋鼠。问这一行中最多可能有多少只海狸？

- (A) 7 (B) 8 (C) 10 (D) 11 (E) 12

「Proposed by Hungary | 匈牙利供題 | 匈牙利供題」

Part 2: 9 problems, 4 points each

第二部分：9 道題目，每題 4 分 | 第二部分：9 道題目，每題 4 分

9. The number below can be written in the form n^n for some integer n . What is the value of n ?

對於某個整數 n ，下面的數可以寫成 n^n 的形式。問 n 的值是多少？

对于某个整数 n ，下面的数可以写成 n^n 的形式。问 n 的值是多少？

$$5^{5^6}$$

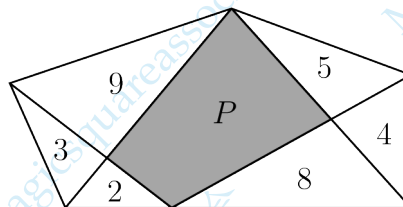
- (A) 11 (B) 30 (C) 5^3 (D) 5^5 (E) 5^6

「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希臘供題」

10. A pentagon is dissected into smaller parts, as shown. The numbers inside the triangles indicate their areas. What is the area P of the shaded quadrilateral?

如圖所示，五邊形被分割成一些更小的部分。三角形內的數表示它們的面積。問陰影四邊形的面積 P 是多少？

如图所示，五边形被分割成一些更小的部分。三角形内的数表示它们的面积。阴影四边形的面积 P 是多少？



- (A) 15 (B) $\frac{31}{2}$ (C) 16 (D) 17 (E) 18

「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希臘供題」

11. Three numbers a , b and c satisfy $ab + c = 1$, and $ac + b = 1$. What is the smallest possible number of true equalities among the following?

三個數 a , b , c 滿足 $ab + c = 1$, $ac + b = 1$ 。在下面的等式中，正確的等式最少可能有幾個？

三个数 a , b , c 满足 $ab + c = 1$, $ac + b = 1$ 。在下面的等式中，正确的等式最少可能有个？

$$(a - 1)(b - c) = 0 \quad b + c = 1 \quad b = c \quad b = -c$$

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

「Proposed by Moldova | 摩爾多瓦供題 | 摩尔多瓦供題」

12. How many positive integers are factors of $2^{20} \cdot 3^{23}$, but are not factors of $2^{10} \cdot 3^{20}$?

有多少個正整數是 $2^{20} \cdot 3^{23}$ 的約數，但不是 $2^{10} \cdot 3^{20}$ 的約數？

有多少个正整数是 $2^{20} \cdot 3^{23}$ 的约数，但不是 $2^{10} \cdot 3^{20}$ 的约数？

- (A) 13 (B) 30 (C) 273
(D) 460 (E) none of the previous | 以上都不對 | 以上都不对

「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希腊供題」

13. A rectangle with vertices $(0, 0)$, $(100, 0)$, $(100, 50)$ and $(0, 50)$ has a circle with centre $(75, 30)$ and radius 10 cut out of it. What is the gradient of the line through $(75, 30)$ that divides the remaining area of the rectangle into two equal parts?

在頂點為 $(0, 0)$, $(100, 0)$, $(100, 50)$, $(0, 50)$ 的矩形中，切除一個圓心為 $(75, 30)$ ，半徑為 10 的圓。通過 $(75, 30)$ 的直線將矩形的剩餘區域分成兩個面積相等的部分，問這條直線的斜率是多少？

在顶点为 $(0, 0)$, $(100, 0)$, $(100, 50)$, $(0, 50)$ 的矩形中，切除一个圆心为 $(75, 30)$ ，半径为 10 的圆。通过 $(75, 30)$ 的直线将矩形的剩余区域分成两个面积相等的部分，问这条直线的斜率是多少？

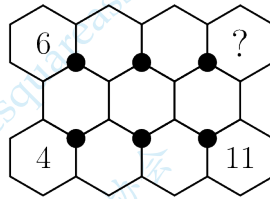
- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

「Proposed by Australia | 澳大利亞供題 | 澳大利亚供題」

14. The numbers from 1 to 11 are to be placed in the hexagons so that the sum of the three numbers around each of the six black dots is the same. Three of the numbers have already been placed. What number will be placed in the hexagon with a question mark?

從 1 到 11 的數將要填入各個六邊形中，使得六個黑點中的每一個周圍的三個數的總和相同。其中三個數已經被填入。問在帶問號的六邊形中會填哪個數？

从 1 到 11 的数将要填入各个六边形中，使得六个黑点中的每一个周围的三个数的总和相同。其中三个数已经被填入。问在带问号的六边形中会填哪个数？



- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

「Proposed by Poland | 波蘭供題 | 波兰供題」

15. Two functions f and g defined on all the real numbers satisfy the below system of equations. What is f ?

定義在全體實數上的兩個函數 f 和 g 滿足下面的方程組。問 f 是什麼？

定义在全体实数上的两个函数 f 和 g 满足下面的方程组。问 f 是什么？

$$\begin{cases} f(x) + 2g(1-x) = x^2 \\ f(1-x) - g(x) = x^2 \end{cases}$$

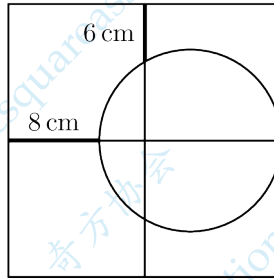
- (A) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ (B) $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$
 (C) $-x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ (D) $x^2 - 4x + 5$
 (E) no such functions | 沒有這樣的函數 | 没有这样的函数

「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希腊供題」

16. The large square in the diagram is dissected into four smaller squares. The circle touches the right hand side of the square at its midpoint. The lengths of the two bold segments are given in the figure. What is the side-length of the large square in cm?

如圖所示，大正方形被分成了四個較小的正方形。一個圓與大正方形的右側邊在其中點處相切。兩條加粗的線段的長度如圖所示。問大正方形的邊長是多少厘米？

如图所示，大正方形被分成了四个较小的正方形。一个圆与大正方形的右侧边在其中点处相切。两条加粗的线段的长度如图所示。问大正方形的边长是多少厘米？



- (A) 18 (B) 20 (C) 24 (D) 28 (E) 30

「Proposed by Germany | 德國供題 | 德国供題」

17. In a bouldering competition, 13 climbers compete in three categories. The score of each competitor is the product of their rankings in the three categories. For example, if one is 4th, 3rd and 6th, his/her final score is $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$. The higher your score, the lower your overall ranking. Hannah ranks 1st in two of the categories. What is her lowest possible overall ranking?

在一次攀岩比賽中，13名登山者在三個項目進行比拼。每名參賽者的得分是他們在三個項目中排名的乘積。例如，如果一個人分別獲得了第4名、第3名和第6名，那麼他/她的最終得分是 $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$ 。你的分數越高，你的整體排名就越低。Hannah 在兩個項目排名第一。問她的整體排名是最低可能是第幾？

在一次攀岩比赛中，13名登山者在三个项目进行比拼。每名参赛者的得分是他们在三个项目中排名的乘积。例如，如果一个人分别获得了第4名、第3名和第6名，那么他/她的最终得分是 $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$ 。你的分数越高，你的整体排名就越低。Hannah 在两个项目排名第一。问她的整体排名是最低可能是第几？

- (A) Second | 第二 | 第二 (B) Third | 第三 | 第三 (C) Fourth | 第四 | 第四
(D) Fifth | 第五 | 第五 (E) Sixth | 第六 | 第六

「Proposed by Germany | 德國供題 | 德国供題」

Part 3: 8 problems, 5 points each

第三部分：8 道題目，每題 5 分 | 第三部分：8 道題目，每題 5 分

18. Part of the fifth degree polynomial $P(x)$ shown cannot be seen because of an inkblot. It is known that all five roots of $P(x)$ are integers. Suppose n is a positive integer such that $(x - 1)^n$ divides $P(x)$, what is the largest possible value of n ?

由於墨水污漬，五次多項式 $P(x)$ 的表達式的一部分無法被看到。已知 $P(x)$ 的所有五個根都是整數。假設 n 是正整數，使得 $(x - 1)^n$ 整除 $P(x)$ ，那麼 n 的最大可能值是幾？

由于墨水污漬，五次多項式 $P(x)$ 的表達式的一部分無法被看到。已知 $P(x)$ 的所有五個根都是整數。假設 n 是正整數，使得 $(x - 1)^n$ 整除 $P(x)$ ，那麼 n 的最大可能值是幾？

$$x^5 - 11x^4 + \text{[inkblot]} - 7$$

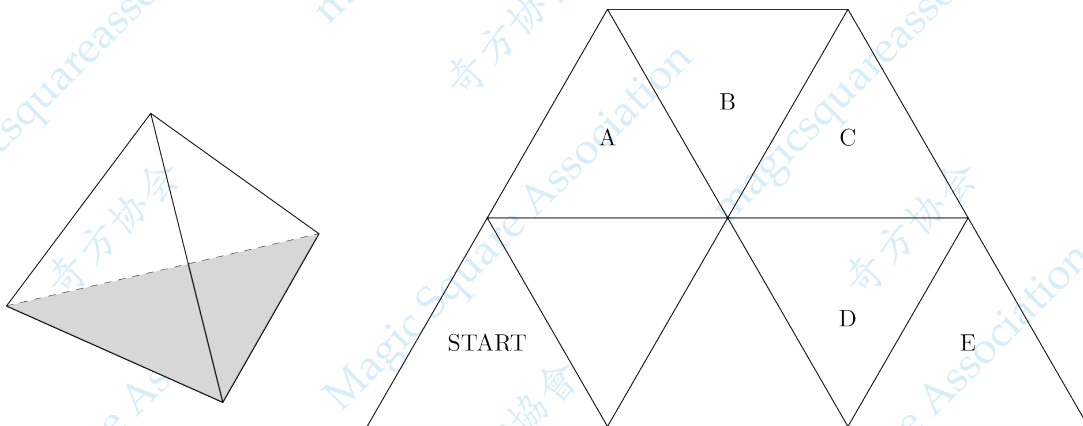
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希臘供題」

19. A block in the shape of a regular tetrahedron has one face shaded. The shaded face of the block is placed on the board on the triangle labelled START. The block is then rolled from one triangle to the next by rotating it about one edge. On which triangle will the block stand for the first time again on its shaded face?

一個正四面體形狀的積木有一個灰色面。積木放置在紙板上標有 START 的三角形上，灰色面與紙板接觸。然後圍繞著積木的一條稜旋轉，將其從一個三角形滾動到下一個三角形。當積木再次通過灰色面與紙板接觸時，它是在哪個三角形之上？

一个正四面体形状的积木有一个灰色面。积木放置在纸板上标有 START 的三角形上，灰色面与纸板接触。然后围绕着积木的一条棱旋转，将其从一个三角形滚动到下一个三角形。当积木再次通过灰色面与纸板接触时，它是在哪个三角形之上？



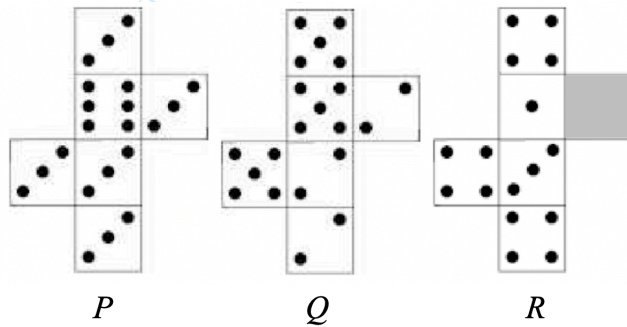
- (A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

「Proposed by Poland | 波蘭供題 | 波兰供題」

20. We say that a dice A is *better* than B , if the probability that in one roll the dice A beats B is greater than 0.5. A picture below presents faces of three dices: P , Q , and R . One of the faces of R is covered. How many dots are possible on this face if we know Q is better than R , and R is better than P ?

如果在拋擲時，骰子 A 擊敗骰子 B 的概率大於 0.5，我們就說骰子 A 比 B “好”。下圖顯示了三個骰子 P , Q , R 的各個面。 R 有一個面被遮住了。如果我們知道 Q 比 R 好，並且 R 比 P 好，那麼這個被遮住的面可能上有多少個點？

如果在拋擲時，骰子 A 擊敗骰子 B 的概率大於 0.5，我們就說骰子 A 比 B “好”。下圖顯示了三個骰子 P , Q , R 的各個面。 R 有一個面被遮住了。如果我們知道 Q 比 R 好，並且 R 比 P 好，那麼這個被遮住的面上可能有多少個點？



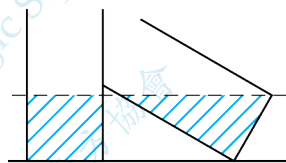
- (A) 1,2 (B) 3 (C) 4 (D) 4,5 (E) 6

「Proposed by Poland | 波蘭供題 | 波兰供題」

21. Two identical cylindrical water tanks contain the same amount of water. One cylinder is standing upright, and the other is leaning against it, and the water level in each of them is the same as in the picture. The bottom of each of the cylinders is a circle with area 3π . How much water does each tank contain?

在兩個相同的圓柱形水箱中裝有同樣多的水。如圖所示，一個圓柱是直立的，另一個靠著它，每個水箱中的水位都一樣高。每個圓柱的底部是一個面積為 3π 的圓。問每個水箱裡裝著多少水？

在两个相同的圆柱形水箱中装有同样多的水。如图所示，一个圆柱是直立的，另一个靠着它，每个水箱中的水位都一样高。每个圆柱的底部是一个面积为 3π 的圆。问每个水箱里装着多少水？



- (A) $\frac{3\pi}{4}$ (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π (E) 9π

「Proposed by Belarus | 白俄羅斯供題 | 白俄罗斯供題」

22. In the radian measures, what is the sum of all the solutions of the below equation in the interval $[0, 2\pi]$?

以弧度製計，下面的方程在區間 $[0, 2\pi]$ 內所有解的總和是多少？

以弧度制計，下面的方程在區間 $[0, 2\pi]$ 內所有解的總和是多少？

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{2022}{2023}$$

- (A) 2π (B) 4π (C) 6π (D) 8π (E) 10π

「Proposed by Iran | 伊朗供題 | 伊朗供題」

23. The product of six consecutive numbers is a 12-digit number of the form $abb\ cdd\ cdd\ abb$, where the digits a, b, c and d are themselves four consecutive numbers in some order. What is the value of the digit d ?

六個連續數的乘積是具有形式 $abb\ cdd\ cdd\ abb$ 的一個 12 位數，其中數字 a, b, c, d 是按某種順序排列的四個連續數。問數字 d 的值是多少？

六个连续数的乘积是具有形式 $abb\ cdd\ cdd\ abb$ 的一个 12 位数，其中数字 a, b, c, d 是按某种顺序排列的四个连续数。问数字 d 的值是多少？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

「Proposed by Australia | 澳大利亞供題 | 澳大利亞供題」

24. Positive integers x, y and z satisfy the following two equations. What is the value of z ?

正整數 x, y, z 滿足以下兩個方程，問 z 的值是多少？

正整数 x, y, z 滿足以下两个方程，问 z 的值是多少？

$$3x^2 + 8y + 17z^2 = 2023 \quad 4x^2 - 6y - 13z^2 = -1520$$

- (A) 3 (B) 4
(C) 6 (D) 8
(E) cannot be determined | 無法確定 | 无法确定

「Proposed by Hong Kong | 香港供題 | 香港供題」

25. Kanga and Panda play a game. Kanga picks 10 non-negative numbers x_1, x_2, \dots, x_{10} (not necessarily different), the sum of which is 1; Panda puts them on a circle in some order, then calculates the product of every two neighbouring numbers and writes the largest one of the 10 products on the board. Kanga wants the number that ends up on the board to be as large as possible (by picking the suitable value of the 10 numbers), while Panda wants the number that ends up on the board to be as small as possible (by adjusting the order of the 10 numbers). What would be the number on the board if both Kanga and Panda follow their best strategies?

袋鼠和熊貓玩遊戲。袋鼠選取 10 個總和為 1 的非負數 x_1, x_2, \dots, x_{10} (未必不同); 熊貓把它們按某種順序放在一個圓圈上, 然後計算每兩個相鄰數的乘積, 並將 10 個乘積中最大的一個寫在白板上。袋鼠希望最終出現在白板上的數盡可能大 (通過恰當選擇 10 個數的值), 而熊貓希望最終出現在白板上的數盡可能小 (通過調整 10 個數的順序)。如果袋鼠和熊貓都遵循各自的最佳策略, 那麼白板上出現的數是多少?

袋鼠和熊貓玩游戏。袋鼠选取 10 个总和为 1 的非负数 x_1, x_2, \dots, x_{10} (未必不同); 熊貓把它们按某种顺序放在一个圆圈上, 然后计算每两个相邻数的乘积, 并将 10 个乘积中最大的一个写在白板上。袋鼠希望最终出现在白板上的数尽可能大 (通过恰当选择 10 个数的值), 而熊貓希望最终出现在白板上的数尽可能小 (通过调整 10 个数的顺序)。如果袋鼠和熊貓都遵循各自的最佳策略, 那么白板上出现的数是多少?

- (A) $\frac{1}{100}$ (B) $\frac{1}{81}$ (C) $\frac{1}{36}$ (D) $\frac{1}{32}$ (E) $\frac{1}{16}$

「Proposed by China | 中國供題 | 中国供題」