



# 2022 Hong Kong Mathematics Kangaroo Contest — Student —

## 2022香港數學袋鼠競賽 — 中學高年級 2022香港数学袋鼠竞赛 — 中学高年級

### Instruction | 說明 | 说明

1. DO NOT FLIP OPEN THIS FRONT COVER UNTIL YOUR PROCTOR TELLS YOU.  
在未收到監考老師指示前，請不要翻開此封面。  
在未收到监考老师指示前，请不要翻开此封面。
2. This is a 25 question multiple choice test. For each question, only one answer choice is correct.  
這是一套包括25道選擇題的測試，每道題目只有一個正確答案。  
这是一套包括25道选择题的测试，每道题目只有一个正确答案。
3. Every question is given a point value. You will receive full points for correct answer, and zero point for blank or incorrect answer. The full score of this test is 100 points.  
每道題目都有給定的分值。每題答對得滿分，答錯或空白得0分。本次測試的滿分為100分。  
每道题目都有给定的分值。每题答对得满分，答错或空白得0分。本次测试的满分为100分。
4. Only scratch paper, graph paper, rulers, protractors, and erasers are allowed as aids. Calculators are NOT allowed. No problems on the test *require* the use of a calculator.  
只能使用草稿紙、方格紙、尺、量角器和橡皮作為輔助工具。計算器是不允許使用的。測試中沒有任何問題必須需要使用計算器。  
只能使用草稿紙、方格紙、尺、量角器和橡皮作为辅助工具。计算器是不允许使用的。测试中没有任何问题必须需要使用计算器。
5. Figures are not necessarily drawn to scale.  
圖形不一定按比例繪製。  
图形不一定按比例绘制。
6. You will have 75 minutes to complete the test once your proctor tells you to begin.  
監考老師宣布開始後，你將有75分鐘的時間完成測試。  
监考老师宣布开始后，你将有75分钟的时间完成测试。

Part 1: 8 problems, 3 points each

第一部分：8 道題目，每題 3 分 | 第一部分：8 道題目，每題 3 分

1. How many positive three-digit integers are divisible by 13?

能被 13 整除的三位正整數有多少個?

能被 13 整除的三位正整数有多少个?

- (A) 68            (B) 69            (C) 70            (D) 76            (E) 77

「Proposed by Hong Kong | 香港供題 | 香港供題」

2. David writes, in increasing order, all the integers from 2 to 2022 which use only 0s and 2s. What is the number in the middle of his list?

David 以遞增的順序寫出從 2 到 2022 的所有隻含有 0 和 2 的整數。問他寫出的數列中正中間的數是多少?

David 以遞增的順序寫出從 2 到 2022 的所有只含有 0 和 2 的整數。問他寫出的數列中正中間的數是多少?

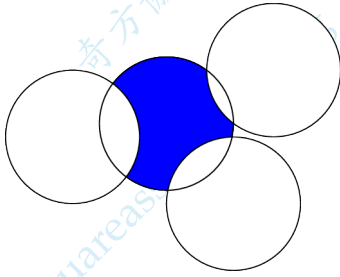
- (A) 200            (B) 220            (C) 222            (D) 2000            (E) 2002

「Proposed by France | 法國供題 | 法国供題」

3. Four circles, each of radius 1, intersect as shown. Let  $p$  be the perimeter of the shaded region, which of the following options is the correct statement about  $p$ ?

如圖所示，四個半徑均為 1 的圓相交。設  $p$  是陰影區域的周長，下面哪個選項是關於  $p$  的正確描述？

如图所示，四个半径均为 1 的圆相交。设  $p$  是阴影区域的周长，下面哪个选项是关于  $p$  的正确描述？



(A)  $p = \pi$

(B)  $\pi < p < \frac{3}{2}\pi$

(C)  $p = \frac{3}{2}\pi$

(D)  $\frac{3}{2}\pi < p < 2\pi$

(E)  $2\pi$

「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希臘供題」

4. How many triples of real numbers  $(x, y, z)$  satisfy the equation  $(|x| - 2)^2 + (|y| + 4)^2 + |z + 8|^2 = 0$ ?

滿足方程  $(|x| - 2)^2 + (|y| + 4)^2 + |z + 8|^2 = 0$  的三元實數組  $(x, y, z)$  有多少個？

滿足方程  $(|x| - 2)^2 + (|y| + 4)^2 + |z + 8|^2 = 0$  的三元實數組  $(x, y, z)$  有多少個？

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 4

(E) 8

「Proposed by Austria | 奧地利供題 | 奧地利供題」

5. Mike has marked the points  $A, B, C$  and  $D$  in this order on a straight line, as shown in the diagram. The distance between  $A$  and  $C$  is 12 cm and between  $B$  and  $D$ , 18 cm. What is the distance between the midpoint of  $AB$  and the midpoint of  $CD$  in centimeters?

如圖所示，Mike 已經在一條直線上按順序標記了點  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和  $D$ 。 $A$  和  $C$  之間的距離是 12 厘米，而  $B$  和  $D$  之間的距離是 18 厘米。 $AB$  的中點與  $CD$  的中點的距離是多少厘米？

如图所示，Mike 已经在一条直线上按顺序标记了点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和  $D$ 。 $A$  和  $C$  之间的距离是 12 厘米，而  $B$  和  $D$  之间的距离是 18 厘米。 $AB$  的中点与  $CD$  的中点的距离是多少厘米？



- (A) 6                      (B) 9                      (C) 12                      (D) 15                      (E) 18

「Proposed by Catalonia | 加泰羅尼亞供題 | 加泰羅尼亞供題」

6. What is the greatest common divisor of  $2^{2021} + 2^{2022}$  and  $3^{2021} + 3^{2022}$ ?

$2^{2021} + 2^{2022}$  與  $3^{2021} + 3^{2022}$  的最大公約數是多少？

$2^{2021} + 2^{2022}$  与  $3^{2021} + 3^{2022}$  的最大公约数是多少？

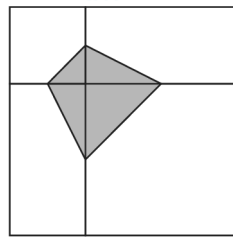
- (A)  $2^{2021}$                       (B) 1                      (C) 2                      (D) 6                      (E) 12

「Proposed by France | 法國供題 | 法国供題」

7. A large square is divided into two unequal squares and two equal rectangles, as shown. The vertices of the shaded quadrilateral are the midpoints of the sides of the two squares. The area of the shaded quadrilateral is 3. What is the area of the unshaded part of the large square?

一個大正方形被分成了兩個不同的正方形和兩個相同的矩形，如圖所示。陰影四邊形的頂點是兩個正方形的邊的中點。陰影四邊形的面積是3。問這個大正方形無陰影部分的面積是多少？

一个大正方形被分成了两个不同的正方形和两个相同的矩形，如图所示。阴影四边形的顶点是两个正方形的边的中点。阴影四边形的面积是3。问这个大正方形无阴影部分的面积是多少？



- (A) 12                      (B) 15                      (C) 18                      (D) 21                      (E) 24

「Proposed by Brazil | 巴西供題 | 巴西供題」

8. If  $p, q$  are distinct positive prime numbers, for how many values of  $a$  does the equation  $x^2 + ax - pq = 0$  has two integer roots?

已知  $p, q$  是不同的正的質數，使得方程  $x^2 + ax - pq = 0$  有兩個整數根的  $a$  值有多少個？

已知  $p, q$  是不同的正的質數，使得方程  $x^2 + ax - pq = 0$  有兩個整數根的  $a$  值有多少個？

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3                      (E) 4

「Proposed by United Kingdom | 英國供題 | 英国供題」

Part 2: 9 problems, 4 points each

第二部分：9 道題目，每題 4 分 | 第二部分：9 道題目，每題 4 分

9. What is the difference between the largest and the smallest values of  $\sin^4 x + \cos^4 x$ ?

表達式  $\sin^4 x + \cos^4 x$  的最大值和最小值的差是多少?

表达式  $\sin^4 x + \cos^4 x$  的最大值和最小值的差是多少?

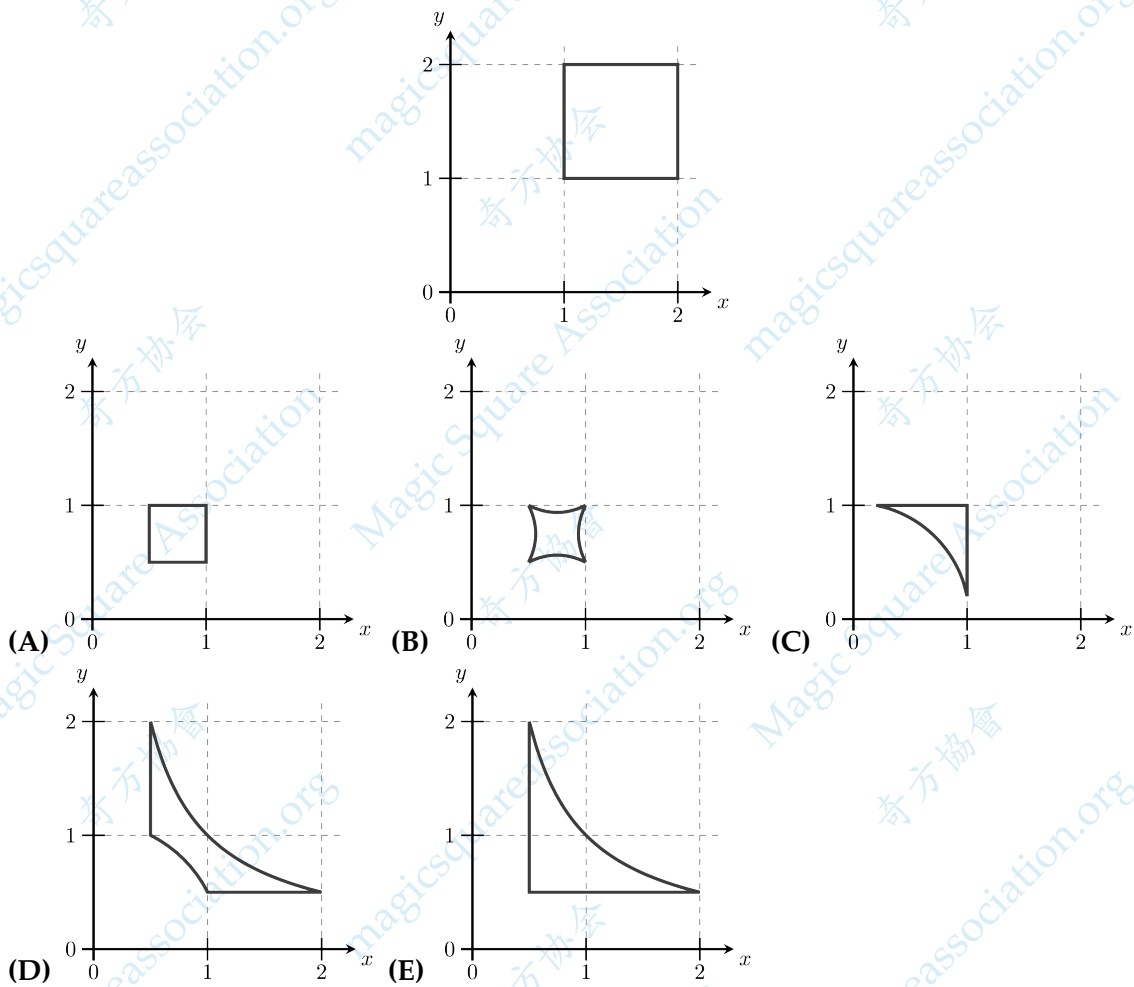
- (A)  $\frac{1}{4}$       (B)  $\frac{1}{2}$       (C)  $\frac{5}{8}$       (D) 1      (E) 2

「Proposed by Poland | 波蘭供題 | 波兰供題」

10. A square lies in a coordinate system as shown. Each point  $(x, y)$  on the square is moved to  $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ . What will the resulting figure look like?

如圖所示，有位於坐標系中的一個正方形。如果正方形上的每個點  $(x, y)$  都移動到  $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ ，那麼所得到的結果會是怎樣的？

如图所示，有位於坐标系中的一个正方形。如果正方形上的每个点  $(x, y)$  都移动到  $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ ，那么所得到的结果会是怎样的？

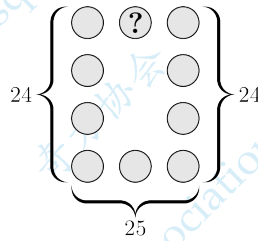


「Proposed by Finland | 芬蘭供題 | 芬兰供題」

11. The numbers 1 to 10 are placed, once each, in the circles of the figure shown. The sum of the numbers in the left column is 24; the sum of the numbers in the right column is also 24 and the sum of the numbers in the bottom row is 25. What number is in the circle containing the question mark?

數 1 到 10 被放置在下圖的各個圓圈中，每個數出現一次。左邊列中的各數之和是 24；右邊列中的各數之和也是 24，底端行的各數之和是 25。含有問號的圓圈裡是什麼數？

数 1 到 10 被放置在下图的各个圆圈内，每个数出现一次。左边列中的各数之和是 24；右边列中的各数之和也是 24，底端行的各数之和是 25。含有问号的圆圈里是什么数？



- (A) 2 (B) 4 (C) 5  
(D) 6 (E) None of the previous | 以上都不是 | 以上都不是

「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希臘供題」

12. Let  $N$  be a positive integer. How many integers are there between  $\sqrt{N^2 + N + 1}$  and  $\sqrt{9N^2 + N + 1}$ ?

設  $N$  為正整數。在  $\sqrt{N^2 + N + 1}$  和  $\sqrt{9N^2 + N + 1}$  之間有多少個整數？

设  $N$  为正整数。在  $\sqrt{N^2 + N + 1}$  和  $\sqrt{9N^2 + N + 1}$  之间有多少个整数？

- (A)  $N + 1$  (B)  $2N - 1$  (C)  $2N$  (D)  $2N + 1$  (E)  $3N$

「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希臘供題」



13. How many positive three-digit integers are there that are equal to five times the product of their digits?

等於其各個數位上數字的乘積的五倍的三位正整數有多少個?

等于其各个数位上数字的乘积的五倍的三位正整数有多少个?

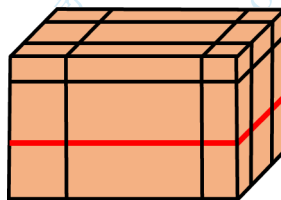
- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4                      (E) 5

「Proposed by Turkey | 土耳其供題 | 土耳其供題」

14. A cuboid of surface area  $S$  is cut by six planes as shown. Each plane is parallel to a face, but its distance from the face is random. Now the cuboid is separated in 27 smaller parts. What, in terms of  $S$ , is the total surface area of all 27 smaller parts?

如圖所示，表面積為  $S$  的長方體被六個平面切割。每個平面都平行於長方體的某個面，但是它與這個面的距離是隨機的。現在這個長方體被分成 27 個更小的長方體。所有 27 個小長方體的總表面積用  $S$  表達是怎樣的?

如图所示，表面积为  $S$  的长方体被六个平面切割。每个平面都平行于长方体的某个面，但是它与这个面的距离是随机的。现在这个长方体被分成了 27 个更小的长方体。所有 27 个小长方体的总表面积用  $S$  表达是怎样的?



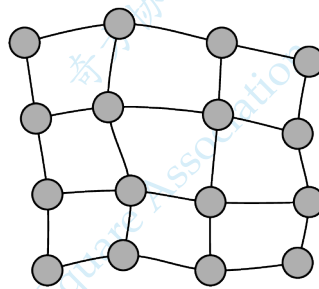
- (A)  $2S$                       (B)  $\frac{5}{2}S$                       (C)  $3S$   
 (D)  $4S$                       (E) None of the previous | 以上都不是 | 以上都不是

「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希臘供題」

15. The map shows a region with 16 cities connected by roads. The government wants to build electricity power plants in some of the cities. Each power plant can provide enough electricity for the city where it is sited and any cities connected to that city by a single road. What is the smallest number of power plants that need to be built?

地圖顯示了由 16 個城市及其相連道路組成的一個地區。政府想在一些城市建發電廠。每座發電廠可以為它所在的城市以及任何通過一條道路與該城市相連的城市提供足夠的電力。問最少需要建設多少座發電廠？

地图显示了由 16 个城市及其相连道路组成的一个地区。政府想在一些城市建发电厂。每座发电厂可以为它所在的城市以及任何通过一条道路与该城市相连的城市提供足够的电力。问最少需要建设多少座发电厂？



- (A) 4                      (B) 5                      (C) 6                      (D) 7                      (E) 8

「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希臘供題」

16. Let  $N$  be a positive integer, all the positive divisors of  $N$  are listed in ascending order as

$$d_1 = 1, d_2, \dots, d_{s-2}, d_{s-1}, d_s = N.$$

If  $d_{s-1} = 2022$ , what is value of  $d_{s-2}$ ?

設  $N$  是正整數， $N$  的所有正約數按遞增順序排列為

$$d_1 = 1, d_2, \dots, d_{s-2}, d_{s-1}, d_s = N.$$

如果  $d_{s-1} = 2022$ ，那麼  $d_{s-2}$  的值是多少？

設  $N$  是正整數， $N$  的所有正約數按遞增順序排列為

$$d_1 = 1, d_2, \dots, d_{s-2}, d_{s-1}, d_s = N.$$

如果  $d_{s-1} = 2022$ ，那麼  $d_{s-2}$  的值是多少？

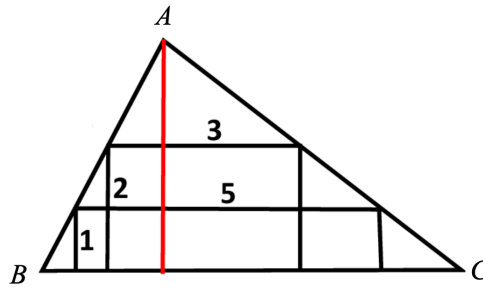
- (A) 337                      (B) 1011                      (C) 1348  
(D) 2021                      (E) Cannot be determined | 無法確定 | 无法确定

「Proposed by Poland | 波蘭供題 | 波兰供題」

17. Two rectangles are inscribed inside a triangle  $ABC$ . The dimensions of the rectangles are  $1 \times 5$  and  $2 \times 3$ , respectively, as shown. What is the height of the triangle with base  $BC$ ?

兩個矩形內接在一個三角形  $ABC$  中。如圖所示，矩形的尺寸分別為  $1 \times 5$  和  $2 \times 3$ 。問三角形底邊  $BC$  上的高是多少？

两个矩形内接在一个三角形  $ABC$  中。如图所示，矩形的尺寸分别为  $1 \times 5$  和  $2 \times 3$ 。问三角形底边  $BC$  上的高是多少？



(A) 3

(B)  $\frac{16}{5}$

(C)  $\frac{7}{2}$

(D)  $\frac{8}{3}$

(E) None of the previous | 以上都不是 | 以上都不是

「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希臘供題」

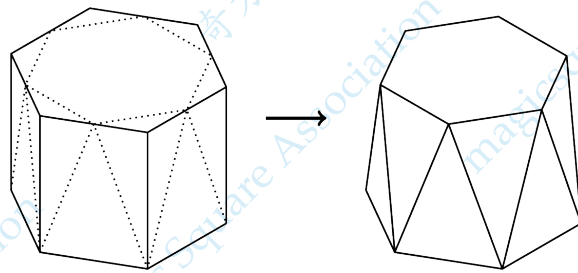
Part 3: 8 problems, 5 points each

第三部分：8 道題目，每題 5 分 | 第三部分：8 道題目，每題 5 分

18. A regular hexagonal prism has its top corners shaved off, as shown. The top face becomes a smaller regular hexagon and the 6 rectangular faces around the middle become 12 isosceles triangles of two different sizes. What fraction of the volume of the original prism has been lost?

正六棱柱的頂角按如圖所示的方式被削掉。頂面變成一個較小的正六邊形，中間的 6 個長方形面變成了 12 個有兩種不同形狀的等腰三角形。問原始棱柱的體積缺失了幾分之幾？

正六棱柱的頂角按如圖所示的方式被削掉。頂面變成一個較小的正六邊形，中間的 6 個長方形面變成了 12 個有兩種不同形狀的等腰三角形。問原始棱柱的體積缺失了幾分之幾？



- (A)  $\frac{1}{12}$       (B)  $\frac{1}{6}$       (C)  $\frac{1}{4\sqrt{3}}$       (D)  $\frac{1}{6\sqrt{2}}$       (E)  $\frac{1}{6\sqrt{3}}$

「Proposed by Australia | 澳大利亞供題 | 澳大利亞供題」

19. Martina is playing in an 8 player tournament. She knows she will beat everyone except Ash, who will beat everybody. In the first round, players are organised randomly into four pairs, and the winner of each match proceeds to the second round. In the second round, there are two matches and the winners of these matches proceed to the final. What is the probability that Martina does not get to the final?

Martina 參加一場 8 人錦標賽。她知道她會打敗除 Ash 之外的所有人，而 Ash 會打敗所有人。在第一輪比賽中，參賽者被隨機分成四對，每場比賽的獲勝者進入第二輪。在第二輪比賽中，有兩場比賽，勝者進入決賽。問 Martina 沒有進入決賽的概率有多大？

Martina 參加一場 8 人錦標賽。她知道她會打敗除 Ash 之外的所有人，而 Ash 會打敗所有人。在第一輪比賽中，參賽者被隨機分成四對，每場比賽的獲勝者進入第二輪。在第二輪比賽中，有兩場比賽，勝者進入決賽。問 Martina 沒有進入決賽的概率有多大？

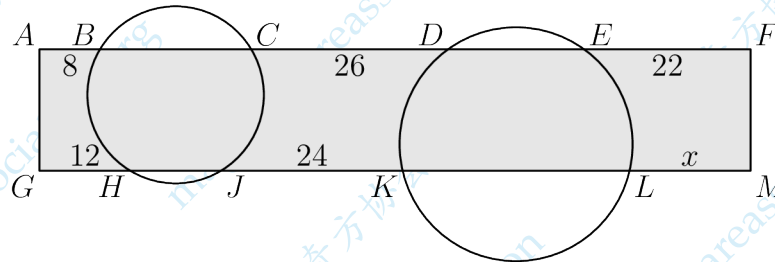
- (A)  $\frac{2}{7}$       (B)  $\frac{3}{7}$       (C)  $\frac{1}{2}$       (D)  $\frac{4}{7}$       (E)  $\frac{2}{3}$

「Proposed by Italy | 意大利供題 | 意大利供題」

20. Two circles cut a rectangle  $AFMG$ , as shown. The line segments outside the circles have lengths  $AB = 8$ ,  $CD = 26$ ,  $EF = 22$ ,  $GH = 12$  and  $JK = 24$ . What is the length of  $LM$ ?

如圖所示，兩個圓與矩形  $AFMG$  相交。已知在圓外的線段的長度： $AB = 8$ ， $CD = 26$ ， $EF = 22$ ， $GH = 12$ ， $JK = 24$ 。問  $LM$  的長度是多少？

如图所示，两个圆与矩形  $AFMG$  相交。已知在圆外的线段的长度： $AB = 8$ ， $CD = 26$ ， $EF = 22$ ， $GH = 12$ ， $JK = 24$ 。问  $LM$  的长度是多少？



- (A) 14                      (B) 15                      (C) 16                      (D) 17                      (E) 18

「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希臘供題」

21. Suppose  $p$ ,  $q$ , and  $r$  are positive prime numbers such that  $p + q + r = 1000$ . What is the remainder when  $p^2q^2r^2$  is divided by 48?

假設  $p$ 、 $q$  和  $r$  是正的質數，滿足  $p + q + r = 1000$ 。問  $p^2q^2r^2$  除以 48 的餘數是多少？

假设  $p$ 、 $q$  和  $r$  是正的质数，满足  $p + q + r = 1000$ 。问  $p^2q^2r^2$  除以 48 的余数是多少？

- (A) 0                      (B) 2                      (C) 4                      (D) 6                      (E) 16

「Proposed by Israel | 以色列供題 | 以色列供題」

22. In a sequence, the first term,  $a_1$  is between 0 and 1. For all  $n \geq 1$ ,  $a_{2n} = a_2 \cdot a_n + 1$  and  $a_{2n+1} = a_2 \cdot a_n - 2$ . Given that  $a_7 = 2$ , what is the value of  $a_2$ ?

在一個數列中，首項  $a_1$  介於 0 和 1 之間。對於所有的  $n \geq 1$ ， $a_{2n} = a_2 \cdot a_n + 1$ ，並且  $a_{2n+1} = a_2 \cdot a_n - 2$ 。已知  $a_7 = 2$ ，那麼  $a_2$  等於多少？

在一个数列中，首项  $a_1$  介于 0 和 1 之间。对于所有的  $n \geq 1$ ， $a_{2n} = a_2 \cdot a_n + 1$ ，并且  $a_{2n+1} = a_2 \cdot a_n - 2$ 。已知  $a_7 = 2$ ，那么  $a_2$  等于多少？

- (A)  $a_1$                       (B) 2                      (C) 3                      (D) 4                      (E) 5

「Proposed by Catalonia | 加泰羅尼亞供題 | 加泰羅尼亞供題」

23. The vertices of a 20-gon are numbered from 1 to 20 in such a way that the numbers of adjacent vertices differ by either 1 or 2. The sides of the 20-gon whose ends differ by only 1 are colored red. How many red sides are there?

20 邊形的各個頂點分別編號為 1 到 20，要求相鄰頂點編號的差是 1 或 2。兩端點編號僅相差 1 的 20 邊形的邊被塗成紅色。問有多少條紅色邊？

20 邊形的各個頂點分別編號為 1 到 20，要求相鄰頂點編號的差是 1 或 2。兩端點編號僅相差 1 的 20 邊形的邊被塗成紅色。問有多少條紅色邊？

- (A) 1 (B) 2  
 (C) 5 (D) 10  
 (E) There are multiple possibilities | 有多種可能 | 有多种可能

「Proposed by Mexico | 墨西哥供題 | 墨西哥供題」

24. In the polynomial  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , each coefficient  $a_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) is a single digit number (i.e.  $0, 1, \dots, 8, 9$ ). If  $P(\sqrt{10}) = 12 + 34\sqrt{10}$ , what is the units digit in the decimal expression of the number  $P(2022)$ ?

在多项式  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  中，每個係數  $a_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) 都是一位數（即 0, 1,  $\dots$ , 8, 9）。如果  $P(\sqrt{10}) = 12 + 34\sqrt{10}$ ，那麼數  $P(2022)$  的十進製表達式中的個位數字是多少？

在多项式  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  中，每个系数  $a_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) 都是一位数（即 0, 1,  $\dots$ , 8, 9）。如果  $P(\sqrt{10}) = 12 + 34\sqrt{10}$ ，那么数  $P(2022)$  的十进制表达式中的个位数字是多少？

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希臘供題」

25. A football match between teams from North Berracan and South Berracan is played in a stadium that has a rectangular array of seats for the spectators. Each spectator is a supporter of either North Berracan or South Berracan. There are 11 North Berracan supporters in each row, and 14 South Berracan supporters in each column. This leaves 17 empty seats. What is the smallest possible number of seats in the stadium?

North Berracan 隊和 South Berracan 隊之間的足球比賽在一個體育場舉行，為觀眾提供的座位排列成長方形。每名觀眾或者是 North Berracan 隊的支持者，或者是 South Berracan 隊的支持者。現在每行有 11 名 North Berracan 隊的支持者，每列有 14 名 South Berracan 隊的支持者。另外還有 17 個空座位。問體育場裡最少有多少個座位？

North Berracan 队和 South Berracan 队之间的足球比赛在一个体育场举行，为观众提供的座位排列成长方形。每名观众或者是 North Berracan 队的支持者，或者是 South Berracan 队的支持者。现在每行有 11 名 North Berracan 队的支持者，每列有 14 名 South Berracan 队的支持者。另外还有 17 个空座位。问体育场里最少有多少个座位？

- (A) 500      (B) 660      (C) 690      (D) 840      (E) 994

「Proposed by Australia | 澳大利亞供題 | 澳大利亞供題」