2024 Hong Kong Mathematics Kangaroo Contest
— Student —
2024香港數學袋鼠競賽 — 中學高年級
2024香港数学袋鼠竞赛 — 中学高年级

Instruction｜說明｜说明

1. DO NOT FLIP OPEN THIS FRONT COVER UNTIL YOUR PROCTOR TELLS YOU.
   在未收到監考老師指示前，請不要翻開此封面。
   在未收到监考老师指示前，请不要翻开此封面。
2. This is a 25 question multiple choice test. For each question, only one answer choice is correct.
   這是一套包括25道選擇題的測試，每道題目只有一個正確答案。
   这是一套包括25道选择题的测试，每道题目只有一个正确答案。
3. Mark your answer to each problem on the answer sheet with a pencil. Check blackened answers for accuracy and erase errors completely. Only answers that are properly marked on the answer sheet will be scored..
   請將每道題目的答案用鉛筆標註在答題卡上。請注意檢查塗寫的黑色長方塊的準確性，用橡皮完全擦掉錯誤的答案。只有恰當標註在答題卡上的答案才會被評分。
   请将每道题目的答案用铅笔标注在答题卡上。请注意检查涂写的黑色长方块的准确性，用橡皮完全擦掉错误的答案。只有恰当标注在答题卡上的答案才会被评分。
4. Every question is given a point value. You will receive full points for correct answer, and zero point for blank or incorrect answer. The full score of this test is 100 points.
   每道題目都有給定的分值。每題答對得滿分，答錯或空白得0分。本次測試的滿分為100分。
   每道题目都有给定的分值。每题答对得满分，答错或空白得0分。本次测试的满分为100分。
5. Only scratch paper, graph paper, rulers, protractors, and erasers are allowed as aids. Calculators are NOT allowed. No problems on the test *require* the use of a calculator.
   只能使用草稿紙、方格紙、尺、量角器和橡皮作為輔助工具。計算器是不允許使用的。測試中沒有任何問題必須需要使用計算器。
   只能使用草稿纸、方格纸、尺、量角器和橡皮作为辅助工具。计算器是不允许使用的。测试中没有任何问题必须需要使用计算器。
6. Figures are not necessarily drawn to scale.
   圖形不一定按比例繪製。
   图形不一定按比例绘制。
7. Before beginning the test, make sure to write the Competition Code "Student", your name and Competition ID with your signature on the answer sheet, especially to bubble in the 9-digit Competition ID completely!
   在開始測試之前，請確保已將競賽代碼"Student"，姓名和准考證號填寫在答題卡上並簽名，特別是9位准考證號的每位數字已經塗好相應的黑色長方塊。
   在开始测试之前，请确保已将竞赛代码"Student"，姓名和准考证号填写在答题卡上并签名，特别是9位准考证号的每位数字已经涂好相应的黑色长方块。
8. You will have 75 minutes to complete the test once your proctor tells you to begin.
   監考老師宣布開始後，你將有75分鐘的時間完成測試。
   监考老师宣布开始后，你将有75分钟的时间完成测试。

© 2024 Magic Square Association｜奇方協會

Part 1: 8 problems, 3 points each

第一部分：8 道題目，每題 3 分 | 第一部分：8 道题目，每题 3 分

1. In the sequence $\{a_n\}$, for any positive integer $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + 23$. Suppose $a_m = 92$ and $a_{100} = 2024$, what is the value of m?

   在數列 $\{a_n\}$ 中，對於任意正整數 $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + 23$。已知 $a_m = 92$ 和 $a_{100} = 2024$，問 m 的值是多少？

   在数列 $\{a_n\}$ 中，对于任意正整数 $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + 23$。已知 $a_m = 92$ 和 $a_{100} = 2024$，问 m 的值是多少？

   (A) 14 **(B)** 15 **(C)** 16 **(D)** 17 **(E)** 18

「Proposed by Poland | 波蘭供題 | 波兰供题」

2. Which of the following integers is two less than a multiple of ten, two more than a square, and two times a prime?

   下面哪個整數比一個 10 的倍數小 2，比一個完全平方數大 2，還是某個質數的 2 倍？

   下面哪个整数比一个 10 的倍数小 2，比一个完全平方数大 2，还是某个质数的 2 倍？

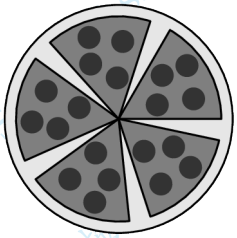
   (A) 6 **(B)** 18 **(C)** 38 **(D)** 58 **(E)** 78

「Proposed by United Kingdom | 英國供題 | 英国供题」

3. A young kangaroo cut a pizza into six equal slices. After eating one slice, he arranged the remaining slices with equal gaps between slices as shown. What is degree measure of the angle in each gap?

   一隻小袋鼠把披薩餅切成相同的六片。吃完一片後，它把剩下的幾片按如圖所示的方式均勻等間距的排列。問每個縫隙處的角度是多少度？

   一只小袋鼠把披萨饼切成相同的六片。吃完一片后，它把剩下的几片按如图所示的方式均匀等间距的排列。问每个缝隙处的角度是多少度？



   (A) 5° **(B)** 8° **(C)** 9° **(D)** 10° **(E)** 12°

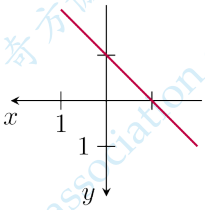
「Proposed by Germany | 德國供題 | 德国供题」

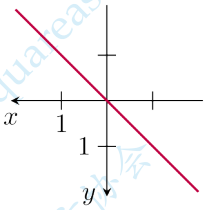
WeChat Public Account | 微信公眾號 | 微信公众号：奇方 Magic Square

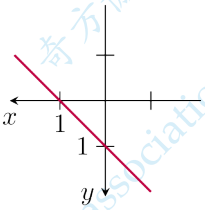
4. Juno has an unusual habit of drawing the xy-plane with the positive coordinate axes pointing left and down. What would the graph of the equation $y = x + 1$ look like in a coordinate system drawn by Juno?

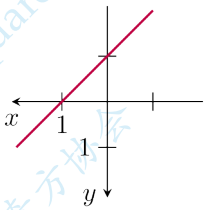
Juno 有一個特殊的習慣，他在畫 xy 坐標平面時，正坐標軸分別是向左和向下的。在 Juno 繪製的坐標系中，方程 $y = x + 1$ 的圖像會是怎樣的？

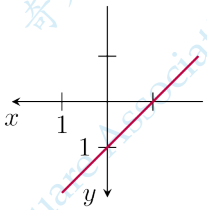
Juno 有一个特殊的习惯，他在画 xy 坐标平面时，正坐标轴分别是向左和向下的。在 Juno 绘制的坐标系中，方程 $y = x + 1$ 的图像会是怎样的？

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

「Proposed by Finland ｜ 芬蘭供題 ｜ 芬兰供题」

5. There are 6 glasses on a table with their open ends up. In any one move, we turn over exactly 4 of them. What is the least number of moves required to have all glasses upside down?

桌子上放置着 6 個開口向上的玻璃杯。每一步，我們可以上下翻動 4 個杯子。問最少需要操作幾步，才能使得所有的玻璃杯都倒扣着？

桌子上放置着 6 个开口向上的玻璃杯。每一步，我们可以上下翻动 4 个杯子。问最少需要操作几步，才能使得所有的玻璃杯都倒扣着？

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

「Proposed by China ｜ 中國供題 ｜ 中国供题」

WeChat Public Account ｜ 微信公眾號 ｜ 微信公众号：奇方 Magic Square

6.

$$16^{15} + 16^{15} + 16^{15} + 16^{15}$$

Which of the following exponents has the same value as the above expression?

上面的表達式和下面的哪個方冪有相同的值?

上面的表达式和下面的哪个方冪有相同的值?

$$16^{15} + 16^{15} + 16^{15} + 16^{15}$$

(A) 4^{31} **(B)** 4^{60} **(C)** 16^{19} **(D)** 16^{60} **(E)** 4^{122}

「Proposed by Russia ｜俄羅斯供題｜俄罗斯供题」

7. Exactly one of these statements about a certain positive integer n is true. Which statement is true?

這些關於正整數 n 的表述中只有一個是正確的。問哪個說法是正確的?

这些关于正整数 n 的表述中只有一个是正确的。问哪个说法是正确的?

(A) n is divisible by 3 ｜ n 能被 3 整除｜ n 能被 3 整除

(B) n is divisible by 6 ｜ n 能被 6 整除｜ n 能被 6 整除

(C) n is odd ｜ n 是奇數｜ n 是奇数

(D) $n = 2$ ｜ $n = 2$ ｜ $n = 2$

(E) n is prime ｜ n 是質數｜ n 是质数

「Proposed by Finland ｜芬蘭供題｜芬兰供题」

8. John has a number of all black or all white unit cubes and wants to build a large $3 \times 3 \times 3$ cube using 27 of them. He wants the surface of the large cube to be exactly half black and half white. What is the smallest number of black unit cubes he can use?

John 有一些全黑或者全白的單位立方體，他想用 27 個單位立方體構建一個 $3 \times 3 \times 3$ 的大立方體。他希望大立方體的表面正好是一半黑色一半白色。問他最少要使用多少個黑色單位立方體?

John 有一些全黑或者全白的单位立方体，他想用 27 个单位立方体构建一个 $3 \times 3 \times 3$ 的大立方体。他希望大立方体的表面正好是一半黑色一半白色。问他最少要使用多少个黑色单位立方体?

(A) 10 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 13 **(E)** 14

「Proposed by Austria ｜奧地利供題｜奥地利供题」

WeChat Public Account ｜微信公眾號｜微信公众号: 奇方 Magic Square

Part 2: 9 problems, 4 points each

第二部分：9 道題目，每題 4 分 | 第二部分：9 道题目，每题 4 分

9. Andre has six cards with one number written on each side of each card. The pairs of numbers on the cards are $(5,12)$, $(3,11)$, $(0,16)$, $(7,8)$, $(4,14)$ and $(9,10)$. The cards can be placed in any order in the blank spaces of the figure. What is the smallest result he can get?

Andre 有六張卡片，每張卡片的正反兩面上各寫着一個數。各張卡片上寫着的兩個數分別是 $(5,12)$，$(3,11)$，$(0,16)$，$(7,8)$，$(4,14)$，$(9,10)$。將卡片以任意的順序放置在下圖的各個空格處。問所能得到的最小結果是多少？

Andre 有六张卡片，每张卡片的正反两面上各写着一个数。各张卡片上写着的两个数分别是 $(5,12)$，$(3,11)$，$(0,16)$，$(7,8)$，$(4,14)$，$(9,10)$。将卡片以任意的顺序放置在下图的各个空格处。问所能得到的最小结果是多少？

$$\square + \square + \square - \square - \square - \square = ?$$

(A) -23 **(B)** -24 **(C)** -25 **(D)** -26 **(E)** -27

「Proposed by Czech Republic | 捷克供題 | 捷克供题」

10. A function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies $f(20-x) = f(24+x)$ for all real numbers x. It is known that f has exactly eight roots $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ on the interval $[0,20]$. How many roots does f have on the interval $[30,40]$?

給定函數 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，對所有實數 x，有 $f(20-x) = f(24+x)$。已知 f 在區間 $[0,20]$ 上有 8 個根：2，3，5，7，11，13，17，19。問 f 在區間 $[30,40]$ 上有多少根？

给定函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，对所有实数 x，有 $f(20-x) = f(24+x)$。已知 f 在区间 $[0,20]$ 上有 8 个根：2，3，5，7，11，13，17，19。问 f 在区间 $[30,40]$ 上有多少根？

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5

(D) 6 **(E)** Cannot be determined | 無法確定 | 无法确定

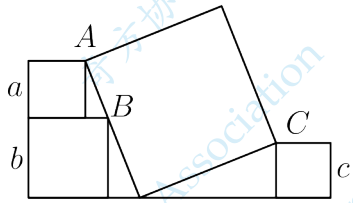
「Proposed by Greece | 希臘供題 | 希腊供题」

WeChat Public Account | 微信公眾號 | 微信公众号：奇方 Magic Square

11. The figure below shows four squares. The three smaller ones have side lengths a, b and c respectively. The vertices A and C of two of the smaller squares coincide with two diagonally opposite vertices of the large square. The vertex B of the third small square is on the side of the large one. Which of the following expressions represents the side length of the largest square?

下圖顯示了四個正方形。三個較小的正方形的邊長分別為 a, b, c。其中兩個較小正方形的頂點 A 和 C 是大正方形中沿著對角線相對的兩個頂點。另一個小正方形的頂點 B 在大正方形的一條邊上。問以下哪個表達式給出了最大正方形的邊長?

下图显示了四个正方形。三个较小的正方形的边长分别为 a, b, c。其中两个较小正方形的顶点 A 和 C 是大正方形中沿着对角线相对的两个顶点。另一个小正方形的顶点 B 在大正方形的一条边上。问以下哪个表达式给出了最大正方形的边长?



(A) $\frac{1}{2}(a+b+c)$ **(B)** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ **(C)** $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$

(D) $\sqrt{(b-a)^2+c^2}$ **(E)** $\sqrt{a^2+ab+b^2+c^2}$

「Proposed by Greece ｜ 希臘供題 ｜ 希腊供题」

12. A polynomial $p(x)$ satisfies the relation $p(x+1) = x^2 - x + 2p(6)$ for every real x. What is the sum of the coefficients of $p(x)$?

多項式 $p(x)$ 滿足條件：對於每一個實數 x，有 $p(x+1) = x^2 - x + 2p(6)$。問 $p(x)$ 的各項係數的和是多少?

多项式 $p(x)$ 满足条件：对于每一个实数 x，有 $p(x+1) = x^2 - x + 2p(6)$。问 $p(x)$ 的各项系数的和是多少?

(A) -40 **(B)** -6 **(C)** 12

(D) 40 **(E)** Cannot be determined ｜ 無法確定 ｜ 无法确定

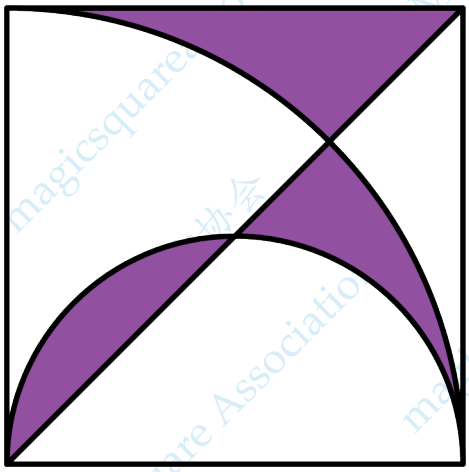
「Proposed by Greece ｜ 希臘供題 ｜ 希腊供题」

WeChat Public Account ｜ 微信公眾號 ｜ 微信公众号：奇方 Magic Square

13. A diagonal, a semicircle and a quadrant are drawn in a square of side 6 cm. What is the area, in cm^2, of the shaded part?

在邊長為 6 厘米的正方形中畫有一條對角線、一個半圓和一個四分之一圓。問陰影部分的面積是多少平方厘米?

在边长为 6 厘米的正方形中画有一条对角线、一个半圆和一个四分之一圆。问阴影部分的面积是多少平方厘米?



(A) 9 **(B)** 3π **(C)** $6\pi - 9$ **(D)** $\frac{10\pi}{3}$ **(E)** 12

「Proposed by Russia ｜俄羅斯供題｜俄罗斯供题」

14. How many three-digit numbers contain at least one of the digits 1, 2 or 3?

包含數字 1，2，3 中至少一個的三位數有多少個?

包含数字 1，2，3 中至少一个的三位数有多少个?

(A) 27 **(B)** 147 **(C)** 441 **(D)** 557 **(E)** 606

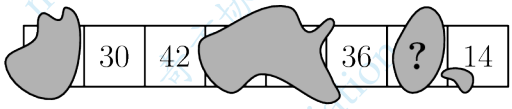
「Proposed by Russia ｜俄羅斯供題｜俄罗斯供题」

WeChat Public Account ｜微信公眾號｜微信公众号：奇方 Magic Square

15. A strip of paper consists of eight squares. Initially each square contains the number 0. In every operation, we choose 4 consecutive squares and add one to each of the numbers in those squares. The figure on the right shows the outcome after a number of operations but unfortunately some ink is covering some of the squares. What number is written on the square with the question mark?

一張長紙條由八個方格組成。最初，每個方格中都寫有數 0。每一步操作是指，我們選擇 4 個連續的方格，並將這些方格中的每個數加 1。下圖顯示了若干些步操作後的結果，但遺憾的是墨水覆蓋了其中的一些方格。帶問號的方格中寫着什麼數?

一张长纸条由八个方格组成。最初，每个方格中都写有数 0。每一步操作是指，我们选择 4 个连续的方格，并将这些方格中的每个数加 1。下图显示了若干些步操作后的结果，但遗憾的是墨水覆盖了其中的一些方格。带问号的方格中写着什么数?



(A) 24 **(B)** 30 **(C)** 36

(D) 48 **(E)** Cannot be determined ｜無法確定｜无法确定

「Proposed by Greece ｜希臘供題｜希腊供题」

16. Rashaw has several unbiased 12-sided dice, each with faces labelled 1 to 12. When rolling all the dice at once, the probability of rolling a 12 exactly once is equal to the probability of rolling no 12s. How many dice does Rashaw have?

Rashaw 有一些公允的 12 面骰子，每個骰子的各個面上標有從 1 到 12 的數。若同時拋擲出所有骰子，12 恰好出現一次的概率等於 12 不出現的概率。問 Rashaw 有多少個骰子?

Rashaw 有一些公允的 12 面骰子，每个骰子的各个面上标有从 1 到 12 的数。若同时抛掷出所有骰子，12 恰好出现一次的概率等于 12 不出现的概率。问 Rashaw 有多少个骰子?

(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 12

「Proposed by Australia ｜澳大利亞供題｜澳大利亚供题」

WeChat Public Account ｜微信公眾號｜微信公众号：奇方 Magic Square

17. A special four-digit number $\overline{abcd}$ satisfies the following equation. What is the value of $a+b+c+d$?

一個特殊的四位數 $\overline{abcd}$ 滿足下面的方程。問 $a+b+c+d$ 的值是多少？

一个特殊的四位数 $\overline{abcd}$ 满足下面的方程。问 $a+b+c+d$ 的值是多少？

$$\overline{abcd} = a^a + b^b + c^c + d^d$$

(A) 9 **(B)** 11 **(C)** 13 **(D)** 15 **(E)** 17

「Proposed by Switzerland ｜瑞士供題｜瑞士供題」

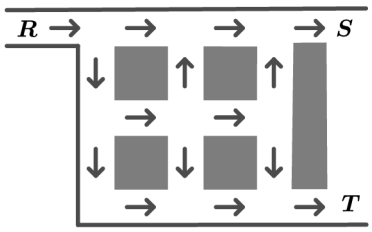
Part 3: 8 problems, 5 points each

第三部分：8 道題目，每題 5 分｜第三部分：8 道題目，每題 5 分

18. The figure below shows a street map, with each road section allowing traffic to flow in only one direction as indicated by the arrows. Starting from R, at each intersection, you randomly choose a direction to go next, with an equal probability for each possible choice. Eventually, you will exit the map through either S or T. What is the probability of exiting through T?

下圖是一張街道圖，其中每個路段都是單行線，只能按箭頭標示的方向行駛。如果你從 R 起始，並且在每個交叉口隨機確定接下來的行駛方向，以相同的概率在允許行進的道路中選擇，最終你將通過 S 或 T 駛出。那麼從 T 駛出的概率是多少？

下图是一张街道图，其中每个路段都是单行线，只能按箭头标示的方向行驶。如果你从 R 起始，并且在每个交叉口随机确定接下来的行驶方向，以相同的概率在允许行进的道路中选择，最终你将通过 S 或 T 驶出。那么从 T 驶出的概率是多少？



(A) $\frac{3}{32}$ **(B)** $\frac{3}{16}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{3}{8}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

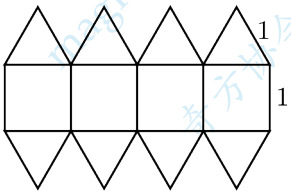
「Proposed by Catalonia ｜加泰羅尼亞供題｜加泰罗尼亚供题」

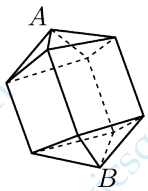
WeChat Public Account ｜微信公眾號｜微信公众号：奇方 Magic Square

19. Otis makes a net using a combination of squares and equilateral triangles, as shown in the left figure. The side-length of each square and of each triangle is 1 cm. He folds the net up into the 3D shape shown on the right. What is the distance, in centimeters, between the vertices A and B?

Otis 用正方形和等邊三角形組成了如左圖所示的平面圖形。每個正方形和三角形的邊長都是 1 厘米。他將平面圖形摺疊成如右圖所示的立體圖形。問頂點 A 和 B 之間的距離是多少厘米?

Otis 用正方形和等边三角形组成了如左图所示的平面图形。每个正方形和三角形的边长都是 1 厘米。他将平面图形折叠成如右图所示的立体图形。问顶点 A 和 B 之间的距离是多少厘米?





(A) $\sqrt{5}$ **(B)** $1+\sqrt{2}$ **(C)** $\frac{5}{2}$ **(D)** $1+\sqrt{3}$ **(E)** $2\sqrt{2}$

「Proposed by Mexico ｜墨西哥供題｜墨西哥供題」

20. The values of x, y and z satisfy $2^x = 3$, $2^y = 7$ and $6^z = 7$. Which of the following gives the relationship between x, y and z?

x, y, z 的值滿足 $2^x = 3$, $2^y = 7$, $6^z = 7$。問 x, y, z 之間的關係可以用下面哪個式子表達?

x, y, z 的值满足 $2^x = 3$, $2^y = 7$, $6^z = 7$。问 x, y, z 之间的关系可以用下面哪个式子表达?

(A) $z = \frac{y}{x} - 1$ **(B)** $z = \frac{x}{y-1}$ **(C)** $z = y - \frac{1}{x}$ **(D)** $z = \frac{x}{y} + 1$ **(E)** $z = \frac{y}{1+x}$

「Proposed by Australia ｜澳大利亞供題｜澳大利亚供题」

WeChat Public Account ｜微信公眾號｜微信公众号: 奇方 Magic Square

21. Twelve points are equally spaced on a circle. How many triangles containing a 45° angle can be formed by choosing three of these points?

十二個點在圓周上等距分佈。從這些點中選擇三個點，組成某個內角為 45° 的三角形，有多少種不同的方法?

十二个点在圆周上等距分布。从这些点中选择三个点，组成某个内角为 45° 的三角形，有多少种不同的方法?

(A) 48 **(B)** 60 **(C)** 72 **(D)** 84 **(E)** 96

「Proposed by Australia ｜澳大利亞供題｜澳大利亚供题」

22. The sum of the digits of the number N is three times the sum of the digits of the number $N+1$. What is the smallest possible sum of the digits of N?

數 N 的各位數字之和是數 $N+1$ 的各位數字之和的三倍。問 N 的各位數字之和的最小可能值是多少?

数 N 的各位数字之和是数 $N+1$ 的各位数字之和的三倍。问 N 的各位数字之和的最小可能值是多少?

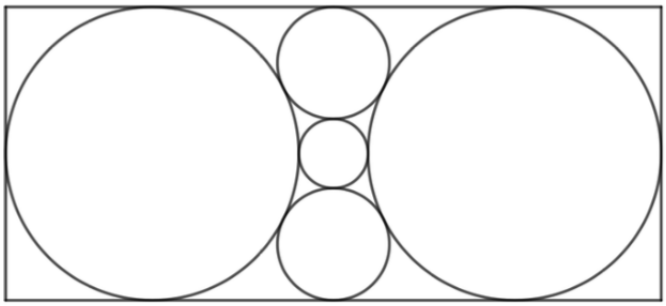
(A) 9 **(B)** 12 **(C)** 15 **(D)** 18 **(E)** 27

「Proposed by Russia ｜俄羅斯供題｜俄罗斯供题」

23. As shown in the figure below, any pair of touching circles are externally tangent to each other, and each side of the rectangle is the tangent to the touching circle(s). The shorter side of the rectangle has length 1. How long is the longer side?

如下圖所示，任意一對相接觸圓彼此外切，矩形的每條邊都和與它接觸的圓相切。矩形較短邊長度為 1。問它的較長邊的長度是多少?

如下图所示，任意一对相接触圆彼此外切，矩形的每条边都和与它接触的圆相切。矩形较短边长度为 1。问它的较长边的长度是多少?



(A) $\sqrt{5}$ **(B)** $\frac{9}{4}$ **(C)** $\sqrt{6}$ **(D)** $2\sqrt{2}$ **(E)** $2\sqrt{3}$

「Proposed by Hong Kong ｜香港供題｜香港供題」

WeChat Public Account ｜微信公众号｜微信公众号：奇方 Magic Square

24. For all real numbers x, the following equation holds, what is the value of integer k?

對於所有實數 x，下面的等式成立，問整數 k 的值是多少？

对于所有实数 x，下面的等式成立，问整数 k 的值是多少？

$$\sin^k x \cdot \sin(kx) + \cos^k x \cdot \cos(kx) = \cos^k(2x)$$

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

「Proposed by Hong Kong ｜ 香港供題 ｜ 香港供題」

25. Suppose n is a positive integer such that when n is divided by 99, 132 and 229, the sum of the three remainders is n. What is the units digit of n?

已知 n 是一個正整數，當 n 除以 99，132，229 時，所得到的三個餘數的和為 n。問 n 的個位數字是多少？

已知 n 是一个正整数，当 n 除以 99，132，229 时，所得到的三个余数的和为 n。问 n 的个位数字是多少？

(A) 1 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 9

「Proposed by Hong Kong ｜ 香港供題 ｜ 香港供題」

WeChat Public Account ｜ 微信公眾號 ｜ 微信公众号：奇方 Magic Square